Algorytmika Praktyczna.
Grafy dwudzielne i drzewa przedziałowe.

Artur Laskowski

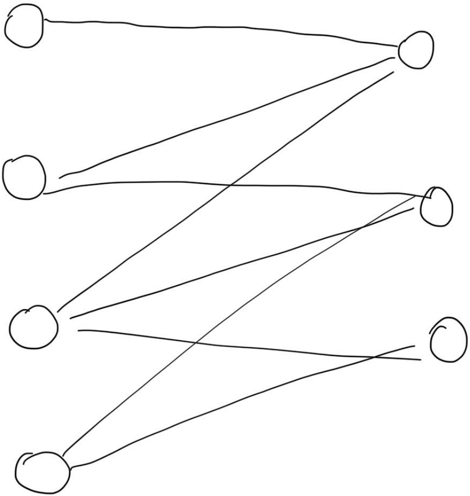
14 kwietnia 2022, Poznań

Graf dwudzielny - przypomnienie

Graf dwudzielny, to taki graf, gdzie wszystkie cykle mają parzystą długość,

Alternatywna definicja: graf, który jest dwu-kolorowalny.

Graf dwudzielny - przykładowy



Graf dwudzielny - algorytm

- Dla każdej spójnej składowej,
- Rozpoczynając z dowolnego wierzchołka,
- Oznacz kolor początkowego wierzchołka,
- Dodaj wierzchołek na kolejkę BFS,
- Rozpocznij procedurę BFS,
  - Pobierz wierzchołek z kolejki,
  - Pokoloruj sąsiadów na kolor przeciwny do koloru aktualnego wierzchołka,
  - Wrzuć sąsiadów na kolejkę,
  - Jeżeli w trakcie kolorowania nastąpi próba pokolorowania wierzchołka na inny kolor, niż taki, który już miał przypisany, to przerwij i zwróć *False*,
- Jeżeli procedura nie zakończyła się wcześniej wartością *False* to zakończ z wartością *True*.

Skojarzenie w grafie dwudzielnym

Skojarzenie (eng. matching) w grafie to zbiór krawędzi, który nie ma wspólnych wierzchołków,

Maksymalne skojarzenie to takie skojarzenie, które zawiera najwięcej krawędzi z pośród wszystkich możliwych dopasowań,

Wierzchołek jest nasycony (saturated), jeżeli wychodzi z niego krawędź znajdująca się w skojarzeniu,

Ścieżka przemienna (alternating path) to ścieżka, w której krawędzie na przemian należą i nie należą do skojarzenia,

Ścieżka poszerzająca (augmenting path) to ścieżka przemienna, której startowy oraz końcowy wierzchołek nie są nasycone.

Skojrzanie - Berge's Lemma

- Skojarzenie jest maksymalne jeżeli nie ma więcej ścieżek poszerzających w tym grafie,
- Jeżeli skojarzenie jest maksymalne to nie ma więcej ścieżek poszerzających,

- Dowód dla chętnych na ostatnim slajdzie.

Skojrzanie - Algorytm Kuhna

- Rozpoczynamy od pustego skojarzenia,
- Poszukaj ścieżki poszerzającej,
- Odwróć przynależność do skojarzenia krawędzi na ścieżce poszerzającej,
- Powtórz dla wszystkich wierzchołków.

- Złożoność tego algorytmu to $O(nm)$, czyli w najgorszym przypadku $O(n^3)$,
- Jeżeli grupy są nie równe to lepiej wykonywać algorytm od strony mniejszej z nich, wtedy złożoność to: $O(n_1^2 n_2)$.

Drzewa przedziałowe

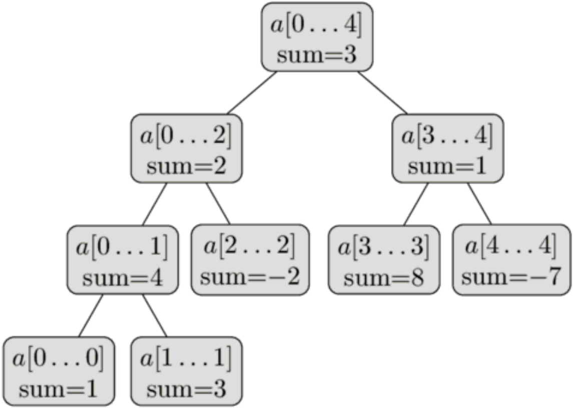
Drzewa przedziałowe są wykorzystywane do odpowiadania na pytania o przedziały na tablicach,

Jednocześnie tablica na której takie drzewo się opiera może być modyfikowana,

Drzewo przedziałowe jest drzewem binarnym.

Drzewa przedziałowe

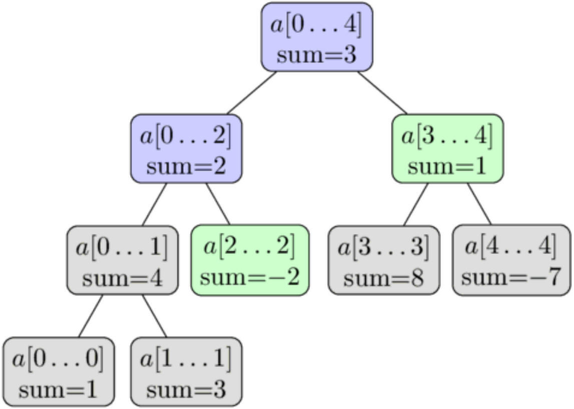
Dla przykładowej tablicy: $a = [1, 3, -2, 8, 7]$,



Drzewa przedziałowe

Dla przykładowej tablicy: $a = [1, 3, -2, 8, 7]$,

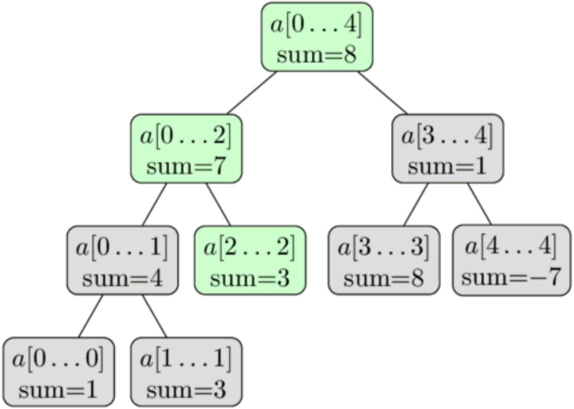
Chcąc sprawdzić sumę na przedziale $[2 - 4]$,



Drzewa przedziałowe

Dla przykładowej tablicy: $a = [1, 3, -2, 8, 7]$,

Chcąc zmienić wartość $a[2] = 3$,



Drzewa przedziałowe - złożoności

Złożoności:

Tworzenie drzewa: ?,

Odpytanie drzewa: ?,

Aktualizacja wartości w tablicy: ?.

Złożoności:

Tworzenie drzewa: $O(n)$,

Odpytanie drzewa: ?,

Aktualizacja wartości w tablicy: ?.

Drzewa przedziałowe - złożoności

Złożoności:

Tworzenie drzewa: $O(n)$,

Odpytanie drzewa: $O(logn)$,

Aktualizacja wartości w tablicy: ?.

Drzewa przedziałowe - złożoności

Złożoności:

Tworzenie drzewa: $O(n)$,

Odpytanie drzewa: $O(logn)$,

Aktualizacja wartości w tablicy: $O(logn)$.

Laboratoria

https://www.hackerrank.com/ap-05-2022

Dowód - Berge's lemma

Proof

Both sides of the bi-implication will be proven by contradiction.

1. A matching M is maximum $\Rightarrow$ there is no augmenting path relative to the matching M.

   Let there be an augmenting path P relative to the given maximum matching M. This augmenting path P will necessarily be of odd length, having one more edge not in M than the number of edges it has that are also in M. We create a new matching M' by including all edges in the original matching M except those also in the P, and the edges in P that are not in M. This is a valid matching because the initial and final vertices of P are unsaturated by M, and the rest of the vertices are saturated only by the matching $P \cap M$. This new matching M' will have one more edge than M, and so M could not have been maximum.

   Formally, given an augmenting path P w.r.t. some maximum matching M, the matching $M' = P \oplus M$ is such that $|M'| = |M| + 1$, a contradiction.

2. A matching M is maximum $\Leftarrow$ there is no augmenting path relative to the matching M.

   Let there be a matching M' of greater cardinality than M. We consider the symmetric difference $Q = M \oplus M'$. The subgraph Q is no longer necessarily a matching. Any vertex in Q has a maximum degree of 2, which means that all connected components in it are one of the three -

   - an isolated vertex
   - a (simple) path whose edges are alternately from M and M'
   - a cycle of even length whose edges are alternately from M and M'

   Since M' has a cardinality greater than M, Q has more edges from M' than M. By the Pigeonhole principle, at least one connected component will be a path having more edges from M' than M. Because any such path is alternating, it will have initial and final vertices unsaturated by M, making it an augmenting path for M, which contradicts the premise. ■